

01. ПОСТЕПЕННО, С ПЕРВОГО ШАГА

Многоэтажные здания строят, ставя по очереди следующий этаж на предыдущий. Начав с первого этажа, можно построить 100-этажный небоскрёб. То же с серийными примерами: их получают последовательно, сравнивая с предыдущими и достраивая по мере необходимости.

1 **а)°** От прямоугольника с неравными сторонами отрезают квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника; если оставшаяся часть не квадрат, процесс повторяют. Докажите, что можно выбрать такой начальный прямоугольник, для которого ровно на *втором* шаге получится квадрат, причем все отрезанные квадраты будут разного размера (оставшаяся часть не в счёт). Докажите, что квадрат может получиться и ровно на:

б)° *третьем* шаге;

в)° *четвёртом* шаге;

г)° на *179-м* шаге, причем во всех пунктах все отрезанные квадраты будут разного размера (оставшаяся часть не в счёт).

2 В компании из n человек ($n \geq 4$) у каждого появилась новость, известная лишь ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2n - 4$ разговора все они могут узнать все новости.

Иногда приходится начинать с построения нескольких этажей сразу.

3° Найдутся ли 50 различных натуральных чисел, сумма которых кратна каждому из них?

Когда предыдущие примеры серии построены, можно для следующего шага использовать не один, а несколько из них, быть может, даже все. Также серия может распадаться на несколько подсерий. Шаги идут внутри подсерий, часто они однотипны, но начала у серий разные.

4° Как построить строку из 100 натуральных чисел, где каждое число при делении на любое из предыдущих даёт в остатке 1?

5° Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов, большее 5.

6° Докажите, что если после очередной реформы в обращение введут монеты в 5 и 26 рублей, то, пользуясь только ими, можно будет уплатить без сдачи любую сумму в целое число рублей, начиная со 100.

Можно шагать не по всем числам, а только по числам избранного вида.

7 **а)°** Из клетчатого квадрата 4×4 вырезали одну клетку (неизвестно, какую). Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток. («Уголок» — это квадрат 2×2 без одной клетки.)

б)° Докажите тот же факт про квадрат 64×64 .

8° На столе стоят 1024 стакана с водой. Разрешается взять один из стаканов и перелить из него часть воды в стакан, где воды меньше так, чтобы воды стало поровну. Укажите, как такими операциями добиться, чтобы во всех стаканах стало поровну воды.

9 **а)** Есть 100 газовых баллонов. Разрешается выбрать от 2 до 5 баллонов и на время соединить их вместе: тогда давление в каждом из них станет равно среднему арифметическому их давлений. Как такими операциями добиться, чтобы во всех баллонах давление стало одинаковым?

б*) Обязательно ли получится уравнять давление в баллонах, если можно объединять от 2 до 4 баллонов?

10* Одномерный куб — отрезок, двумерный — квадрат, трёхмерный — обычный куб в (трёхмерном) пространстве. Изобразите:

а) трёхмерный куб на двумерной плоскости (это наша обычная плоскость);

б) двумерный куб на одномерном пространстве (то есть на прямой);

в) четырёхмерный куб на двумерной плоскости;

г) четырёхмерный куб в трёхмерном пространстве (например, с помощью спичек и пластилина).

Сколько вершин у:

д) трёхмерного;

е) четырёхмерного;

ж) n -мерного куба.

Гипергрань куба — грань, размерность которой на один меньше размерности куба. Например, гиперграни одномерного куба — концы отрезка, двумерного — стороны квадрата, трёхмерного — обычные грани куба (квадраты). Сколько: **з)** гиперграней; **и)** рёбер (или одномерных граней) у n -мерного куба?